数理解析研究所講究録
660巻 1988年 197-212

Some theorems for holomorphic functions with proximate order $1+\log(\log r)/\log r$

上智大理工　吉野邦生 (Kunio Yoshino)

解析汎函数の理論を用いて筆者は、既に、指数型正則函数に対して、カールソンの定理、リュービル型定理、しんとの定理などを証明した。（文献 [11], [12]）
ここでは、ここでは、増大度が、指数型函数よりは大きい次の様な評価を満たす正則函数について、上記の定理などについて考えてみたい。

① $F(z) \in \mathcal{O}(\{z \in \mathbb{C}^n ; \ \mathrm{Re}\, z_i > 0, \ 1 \leq i \leq n\})$

② $\forall \varepsilon > 0, \ \forall \varepsilon' > 0, \ \exists C_{\varepsilon,\varepsilon'} > 0$

$$|F(z)| \leq C_{\varepsilon,\varepsilon'} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i + k_i |y_i| + \varepsilon |z|\right)$$

$$(x_i = \mathrm{Re}\, z_i \geq \varepsilon')$$

但し、$z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$, $0 \leq k_i < \pi$ である。

②の様な評価を満たす関数は、いわゆる proximate order $1+\log(\log r)/\log r$ に関して normal type となる。通常の指数型函数は proximate order 1 について normal type である。詳しくは、文献〔3〕、〔4〕を見られたい。

①，②を満足する函数の例としては、$\frac{1}{\Gamma(1-z)}$，(ここで、Γは、ガンマ函数)、或いは、パラモドフが、文献〔8〕で、導入した急減少超函数のフーリエ変換像である整函数などがある。(但し、パラモドフの使用している変数とは、実部、虚部が入れかわっている。)

以下、先ず $n=1$ (1次元) の時を調べ、高次元の場合は、最後に述べる。§1で、$F(z)$のメリン変換 $MF(w)$を定義、その性質を調べる。特に、その際、$MF(w)$が、漸近展開を持つことを示す。(この漸近展開は、条件 $0\leq \theta<\pi/2$ の下に、強漸近展開であることに留意。) 次いで、§2では、$F(z)$を$MF(w)$を用いて積分表示できることを示す。§3では応用として、カールソンの定理、リュービル型定理…などの証明を行なう。最後に、§4で、高次元の場合を扱う。

§1. 正則函数 $F(z)$ のメリン変換

正則函数 $F(z)$ は、条件 ①、② を満足しているとする。(以下 §4 までは、$n=1$ とする。) このとき、$F(z)$ のメリン変換(もしかしたら、ワトソン・ゾンマーフェルト変換と呼ぶ方がよいかもしれない)を次の様に定義する。

$$③ \quad \mathbb{M}F(w) = \frac{-1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(z)(-w)^z}{\sin \pi z} dz ,$$

但し、$0 < c < 1$.

$\mathbb{M}F(w)$ は、次の性質を持つ。

命題1 ([2], [11])

$$④ \quad \mathbb{M}F(w) \in \mathcal{O}(\{w \in \mathbb{C} ; h < |\arg w| \leq \pi\})$$

$$⑤ \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C_{\varepsilon,\varepsilon'} > 0,$$

$$|\mathbb{M}F(w)| \leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'} |w|^{\varepsilon'}$$

$$(h + \varepsilon \leqq |\arg w| \leqq \pi)$$

⑥ $\mathcal{M}F(w)$ は、扇形 $\{w \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2}+\varepsilon \leqq |\arg w| \leqq \pi\}$ において、次の漸近展開を持つ。

$$\mathcal{M}F(w) \sim \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, w^n$$

もう少し、詳しく述べれば、$^\forall N$(自然数) $^\exists C_N > 0$、$0 < {}^\exists \delta < 1$、$^\exists A > 0$、

$$\left| \mathcal{M}F(w) - \sum_{n=1}^{N} F(n) w^n \right| \leqq C_N A^N \cdot N! \, |w|^{N+\delta}$$

が、上記の扇形領域で成立する。

(証明)　④は、メリン変換の定義における積分が絶対収束する範囲を調べることにより、示すことができる。その際、同時に、⑤も判る。
⑥については、積分路 $[c-i\infty, c+i\infty]$ を右に平行移動し、$[N+\delta-i\infty, N+\delta+i\infty]$ に移す。その際に、留数計算を実行すると漸近展開を得ることができる。(スターリングの公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$ を用いることは言うまでもない。)

注意　$0 \leqq \theta < \pi/2$ であると，漸近展開⑥は，強漸近展開である。特に，$F(n) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であると，$MF(\omega) = 0$。詳しくは文献〔9〕，〔11〕を見られたい。

§2.　F(z) の MF(ω) による積分表示式

F(z) を MF(ω) を用いて積分表示することが，このセクションの目標である。

命題2　F(z) は，①，② を満たすとする。このとき，

$$⑦ \quad F(z) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} MF(\omega)\, \omega^{-z-1}\, d\omega$$

が，$0 < \mathrm{Re}\, z < 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ について成立する。

但し，積分路 $\Gamma_{\varepsilon,\delta}$ は，図1に示す様な積分路である。

$$\Gamma_{\varepsilon,\delta} = [\delta e^{i(\theta+\varepsilon)}, \infty e^{i(\theta+\varepsilon)}] \cup [\delta e^{-i(\theta+\varepsilon)}, \infty e^{-i(\theta+\varepsilon)}]$$

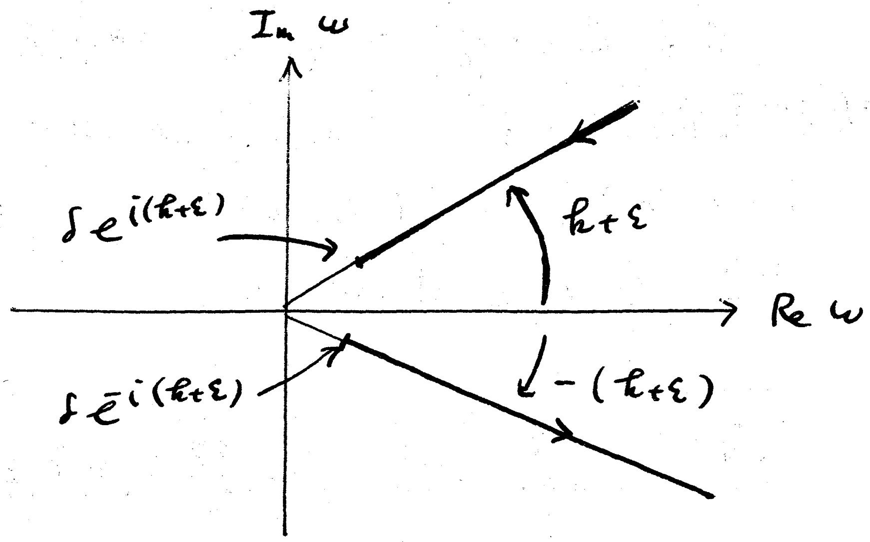

図 1.

(証明)

⑦の右辺に、メリン変換の定義を代入して計算する

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} \mathcal{M}F(w)\, w^{-z-1}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} \frac{-1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(t)(-w)^t}{\sin \pi t}\,dt \cdot w^{-z-1}\,dw$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(t)}{\sin \pi t} \cdot \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} (-w)^t w^{-z-1}\,dw$$

ここで、

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} (-w)^t w^{-z-1}\,dw = \frac{1}{t-z}\sin(\pi z-(k+\varepsilon)(t-z))\,\delta^{t-z}$$

であるので、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{P_{\varepsilon,\delta}} M F(w) w^{-z-1} dw = \frac{-1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin(\pi z-(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)(t-z))\,\delta^{t-z}}{(t-z)\sin\pi t} F(t)dt$$

$$= F(z) + \frac{-1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\sin(\pi z-(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)(t-z))\,\delta^{t-z}}{(t-z)\sin\pi t} F(t)dt$$

但し、今、$0<c<\mathrm{Re}\, z<c'<1$ としている。

第2項においては、$\mathrm{Re}(t-z)=c'-\mathrm{Re}\, z>0$

である。従がって、

$$\lim_{\delta\to 0}(\text{第2項})=0.$$

以上より、

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{P_{\delta,\varepsilon}} M F(w) w^{-z-1} dw = F(z)$$

//

ここで具体例を揚げてこのセクションを閉じる。

<u>例</u> $F(z) = \dfrac{-1}{\Gamma(1-z)}$

この場合，$F(z)$は，$\mathbb{C}$上正則で，$\theta = \pi/2$に対して，条件②の評価をみたすことは，ハンケル積分表示式から判る。

$$(MF)(w) = \frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\Gamma(1-z)} \cdot \frac{(w)^z}{\sin \pi z}\,dz$$

ここで，積分路$(c-i\infty, c+i\infty)$を左に移動して行けば，留数定理により，

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^{-n} = e^{\frac{1}{w}}.$$ 従って，

◎ $(MF)(w) = e^{\frac{1}{w}}$.

◎ $(MF)(w) \in \mathcal{O}(\{\mathbb{C} \setminus \{0\}\})$.

◎ $(MF)(w) \sim 0$. $\left(\frac{\pi}{2} < |\arg w| \leq \pi\right)$

が判る。 積分表示式⑦を確かめると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} MF(w)\, w^{-z-1}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} e^{\frac{1}{w}}\, w^{-z-1}\,dw$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_{P_{\varepsilon\delta}} e^{t}\cdot t^{z-1}\,dt \qquad (\omega^{-1}=t\ とした)$$

以上から、Hankel積分表示式（ガンマ関数の）に注意して、

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{P_{\varepsilon,\delta}} \mu F(\omega)\,\omega^{-z-1}\,d\omega = \lim_{\delta\to 0}\frac{-1}{2\pi i}\int_{P_{\varepsilon,\delta}} e^{t}\,t^{z-1}\,dt$$

$$= \frac{-1}{\Gamma(1-z)} \quad //$$

§3. 応用

定理1（カールソンの定理） $0 \leqq k < \pi/2$ とする。
$F(z)$ は①、②を満足しているとする。このとき、
もしも、$F(n)=0$,（$n=1,2,3,\cdots$）であって、
$F(z)\equiv 0$ である。

(証明) $F(z)$のメリン変換 $MF(w)$を考えると命題1の⑥により, $MF(w)$は,

$$MF(w) \sim \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, w^{n}$$

という漸近展開を持つ。今,仮定 $F(n)=0$. $(n=1,2,3\ldots)$ により,

$$MF(w) \sim 0.$$

又, $0 \leqq \theta < \pi/2$ であるので,これは強漸近展開である。故に, $MF(w) \equiv 0$.

積分表示式

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \to 0} \int_{\Gamma_\delta} MF(w)\, w^{-z-1}\, dw \qquad (0<\mathrm{Re}\, z<1)$$

により, $F(z) \equiv 0$, $\quad (0 < \mathrm{Re}\, z < 1)$

解析接続の一意性により,

$$F(z) \equiv 0 \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

となる。 //

以下,このセクションでは, $0 \leqq \theta < \pi/2$, と $F(z)$ が ①,② を満たすことを仮定する。

定理2（Phragmen-Lindelöf型定理）

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|F(n)|^{1/n}=A$$

とする。このとき、$F(z)$は、$\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Re} z>0\}$で指数型正則函数である。

（証明）

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|F(n)|^{1/n}=A$により、級数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}F(n)w^n$は$|w|<1/A$で収束している。一方、$F(z)$のメリン変換は$MF(w)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}F(n)w^n$という漸近展開を持っているので、実は、$MF(w)\equiv\sum\limits_{n=1}^{\infty}F(n)w^n$が、$|w|<1/A$で成立する。故に、積分表示式

$$F(z)=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}}MF(w)\,w^{-z-1}\,dw$$

において、$\lim\limits_{\delta\to0}$は不用となり、$\Gamma_{\varepsilon\delta}$を図2における$\Gamma_{A,\varepsilon}$に置き換えられる。

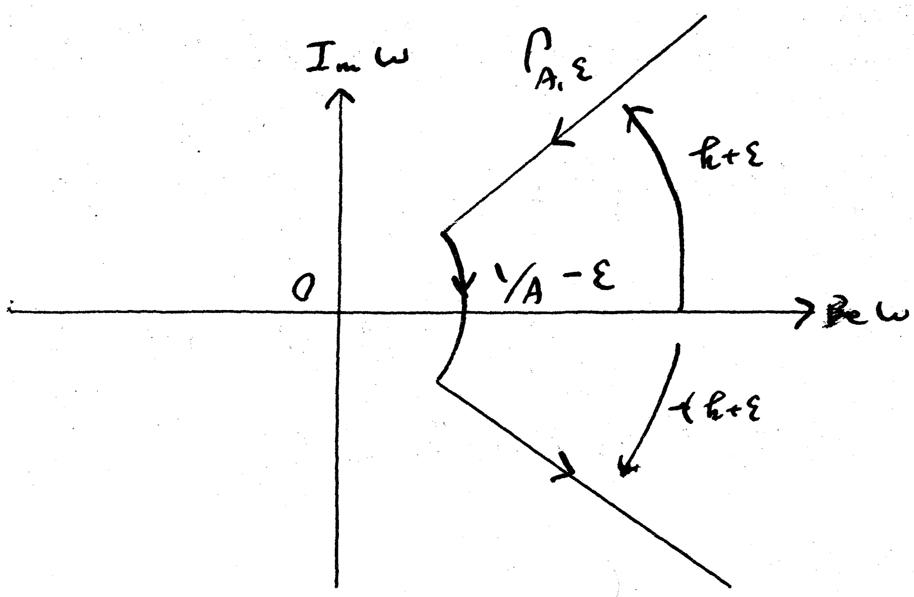

図2

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A}(MF)(w)\,w^{-z-1}\,dw. \qquad (0<\mathrm{Re}\,z<1)$$

の右辺はもちろん $\mathrm{Re}\,z>0$ で正則であるが、今、命題1の㋑により、$|MF(w)|\leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'}|w|^{\varepsilon'}$ であるので、右辺の積分で定義される函数は、やはり $\mathrm{Re}\,z>0$ で正則であることが判る。故に、上の積分表示式は、$\mathrm{Re}\,z>0$ で有効である。

従がって、$F(z)$ を右辺の式を用いて増大度評価すれば、$F(z)$ が指数型であることが判る。//

定理2の応用として、次の様なことも判る。

「もして、$F(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^1)$ で、$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |F(n)|^{1/n} = A$

$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |F(-n)|^{1/n} = B$、　A、B 共に有限とすれば、

$F(z)$ は、$\mathbb{C}$ 上 指数型整函数である。」

又、定理2の他の応用としては カートライトの定理がある。

<u>定理</u>3 (Cartwright) 全ての $n=1,2,3\cdots$ について

$|F(n)| \leq M$ であると、$|F(x)| \leq M'$.

(証明)

定理2により、$F(z)$ は、指数型函数になることが判る。なお、古典的なカートライトの定理([1])により、上記の結果を得ることができる。 //

最後に、リユービル型定理を述べてこのセクションを終えることにする。

定理4 (Liouville type theorem) $k=0$ とする。

$$F(n) = O(|n|^p) \quad (n=\pm 1, \pm 2, \cdots)$$

であると、$F(z)$ は、高々 p 次多項式である。

(証明) 定理3の直前に述べた事により、$F(z)$ は、指数型整函数である。従って、ベルンシュタインの定理([1])を適用することができて、この定理の証明が終わる。//

§4. 高次元の場合

以上述べてきたことを高次元化するには、メリン変換、$F(z)$ の積分表示式を多重積分にすればよい。但し、フラグメン・リンデレフ型定理の証明の際には、$MF(\omega)$ の正則域についての解析接続の議論が必要である。詳しくは[12]を見られたい。カールソンの定理は帰納法だけでも容易に示すことができる。例えば、$n=2$ の場合、$F(n_1, n_2)=0$ $((n_1, n_2) \in N^2)$ を仮定する。このとき、$F(z_1, n_2)$ という z_1 の

函数を考えれば、$n=1$の場合の結果より

$$F(z_1, n_2) = 0 \qquad (\mathrm{Re}\, z_1 > 0)$$

が判る。今度は、z_1を$(\mathrm{Re}\, z_1 > 0)$の中で1つ固定して、$F(z_1, z_2)$を考えると、$F(z_1, n_2) = 0$ $(n_2 \in \mathbb{N})$により、やはり、$n=1$の場合の結果が適用できて、$F(z_1, z_2) \equiv 0$が判る。$n > 2$の時も同様である。リューヴィル型定理も同様にして、帰納的に示すことができる。詳しくは[12]を参照。

参考文献

[1] R.P. Boas: Entire Function, Academic Press, New York,1954

[2] Yu A. Kubyshin : Sommerfeld-Watson summability method of perturbation series, Theoretical and Mathematical Physics, 58,(1984) 91-96

[3] P.Lelong and L.Gruman: Entire Functions of Several Complex Variables, Springer-Verlag, Berlin,.Heiderberg, New York, Tokyo,1986

[4] B.Ja.Levin : Distribution of zeros of entire functions, Translation of Mathematical Monographs,American Mathematical Society,1964.

[5] M. Morimoto cnd K. Yoshino : A uniqueness theorem for holomorphic functions of exponential type, Hokkaido Math.J.7, (1978),259-270

[6] F.Nevanlinna : Zur theorie der asymptotishen potenzreihen, Ann.Acad.Sci.Fennicae ser A. 12, 1918.

[7] F.Nevanlinna : Zur theorie der asymptotishen potenzreihen, Ann.Acad.Sci.Fennicae ser A. 16,1922

[8] V.P. Palamodov : From hyperfunctions to analytic functionals, Soviet Math.Dokl. 18, (1977),975-979

[9] M.Reed and B.Simon : Analysis of Operators, (Method of Mothern Mathematical Physics Vol 4), Academic Press, New York, London 1978

[10]A.D.Sokal: An improvement of Watson's theorem on Borel summability, J.Math.Phys. 21,(1980), 261-263.

[11] K.Yoshino : Lerch's theorem for analytic functionals with non-compact carrier and its applications to entire functions, Complex varibles, 2,(1984),303-318.

[12] K.Yoshino : Liouville type theorem for entire functions of exponential type, Complex Variable, 5,(1985), 21-51.